

带电粒子最短运动时间 疑难问题的深度思考*

戎杰 孙旭磊 王雨轩 (浙江省慈溪中学 浙江 315300)

摘要 针对带电粒子最短运动时间的疑难问题,运用解析法、几何法、运动分解法、Matlab 软件模拟法展开深度思考。夯实基本方法,培养高阶思维,拓宽学科视野,促进素养水平,体现数理结合、软件模拟等思想方法在解决物理疑难问题中的重要作用。

关键词 最短时间 数理结合 软件模拟

文章编号 1002-0748(2021)5-0064

中图分类号 G633·7

文献标识码 B

物理学科的核心素养,是学生在接受物理教育的过程中,逐步形成的适应个人终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力,是学生通过物理学习,内化形成的带有物理学科特质的品质。带电粒子在有界磁场中的运动问题,是电磁学模块的重点和难点,从形成物理观念、解决基本问题的技能来看,学生比较熟悉的模型主要有三类:

- (1) 入射速度大小和方向都确定,轨迹圆确定;
- (2) 入射速度方向不变,大小变化,可以用动态缩放法描绘轨迹圆;
- (3) 入射速度大小不变,方向变化,可以用动态旋转法描绘轨迹圆。

从培养学科素养、形成高阶思维的角度来说,需要教师在课堂教学过程中引导学生对问题进行深层次的思考和探究,提升学生的物理思维品质和解决问题能力。

例题 某装置如图 1 所示,平行金属板 a 、 b 水平放置,板长 $L = 0.2 \text{ m}$,板间距 $d = 0.2 \text{ m}$,在两极板之间加上偏转电压 $0 \leq U_{ab} \leq 400 \text{ V}$ 。金属板的右端有一宽度 $s = 0.4 \text{ m}$ 的匀强磁场区域,磁感应强度 $B = 5 \times 10^{-3} \text{ T}$,方向垂直纸面向外,上下范围足够大,磁场边界 MN 和 PQ 均与金属板垂直。在极板左端有一粒子源,不断地向右沿着与两极板等间距的水平线 OO' 发射比荷 $\frac{q}{m} = 1 \times 10^8 \text{ C/kg}$ 、初速度 $v_0 = 2 \times 10^5 \text{ m/s}$ 的带正电粒子,求粒子在右侧磁场中运动的最短时间 t_{\min} 和相应的偏转电压 U 。(忽略粒子重力及相互之间的作用)

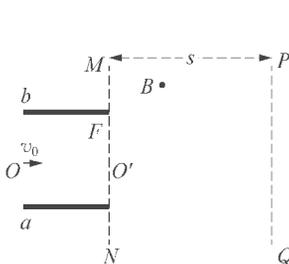


图 1 装置示意图

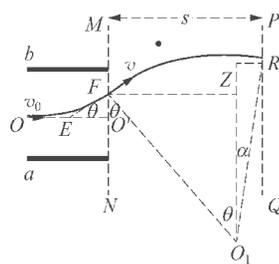


图 2 轨迹示意图

思路剖析: 设 a 、 b 之间加电压 U ,通过对带电粒子的运动过程分析可知,粒子在极板间做类平抛运动,如图 2 所示。粒子从 F 点离开电场,以速度 v 从磁场左边界 MN 进入右侧磁场区域,在磁场中做匀速圆周运动,最终打在右边界 PQ 上的 R 点。易知,随着电压 U 的增大,极板间沿电场方向的侧移量 y 同时增大,离开电场时沿电场方向的速度 v_y 和合速度 v 也增大,因此,带电粒子进入有界磁场的速度方向和大小都在变化,不属于上述三种基本模型,学生十分陌生,不知从何下手。设 $\angle FO_1Z$ 为 θ , $\angle RO_1Z$ 为 α ,因粒子在磁场中运动时间 $t = \frac{\theta + \alpha}{2\pi} \cdot T = \frac{(\theta + \alpha)m}{qB}$,而比荷 $\frac{q}{m}$ 、磁感应强度 B 均为已知条件,因此求粒子在磁场中做圆周运动的最短时间,其实就是求 $\theta + \alpha$ 的最小值。

1 解析法

根据类平抛运动的规律,速度 v 的反向延长线交水平线 OO' 于中点 E , $EO' = \frac{L}{2} = 0.1 \text{ m}$,

* 基金项目:本文是 2020 年宁波市教育科学规划研究课题“高中物理质疑创新能力培养的策略研究”(项目编号:2020YGH140)的阶段性研究成果。

$\angle FO_1Z = \angle FEO' = \theta$ 。设粒子射出极板时沿电场方向的侧移量 $FO' = y (0 \leq y \leq 0.1 \text{ m})$, 有:

$$\tan \theta = \frac{y}{\frac{L}{2}} = 10y, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+(10y)^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{10y}{\sqrt{1+(10y)^2}} \quad ①$$

$$\text{又因 } r = \frac{mv}{qB} = \frac{m \frac{v_0}{\cos \theta}}{qB} = \frac{mv_0}{qB \cos \theta}, \quad ②$$

代入数据 $B = 5 \times 10^{-3} \text{ T}$, $\frac{q}{m} = 1 \times 10^8 \text{ C/kg}$, 联立

$$\text{①②式得: } r = \frac{2}{5} \sqrt{1+(10y)^2}. \quad ③$$

而 FZ 水平距离 $s_1 = r \sin \theta$, 则

$$\sin \alpha = \frac{s - s_1}{r} = \frac{s - r \sin \theta}{r} \quad ④$$

由③④式化简可得:

$$\sin \alpha = \frac{1-10y}{\sqrt{1+(10y)^2}}, \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{20y}{1+(10y)^2}} \quad ⑤$$

根据三角函数知识: $\sin(\theta + \alpha) = \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha$; 代入①④⑤三式可得:

$$\sin(\theta + \alpha) = \frac{20\sqrt{5}y^{\frac{3}{2}} - 10y + 1}{100y^2 + 1} \quad ⑥$$

对于⑥式复杂函数, 采用作图法判断其单调性。如图 3 所示, 可知在 $0 \leq y \leq 0.1 \text{ m}$ 区间内, 函数单调递减。

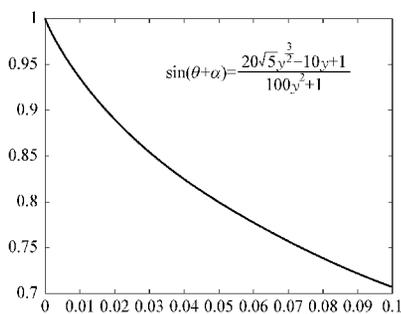


图 3 $\sin(\theta + \alpha)$ 数值随 y 值的变化图线

可以判定: 当 y 取 $y_{\max} = \frac{d}{2} = 0.1 \text{ m}$ 时,

$\tan \theta = 1, \theta = \frac{\pi}{4}, \alpha = 0, (\theta + \alpha)_{\min} = \frac{\pi}{4}$, 代入数据

易得: $t_{\min} = \frac{\pi m}{4qB} = \frac{\pi}{2} \times 10^{-6} \text{ s}$ 。

当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $v_y = \frac{UqL}{dmv_0} = v_0, U = \frac{dmv_0^2}{qL}$;

代入数据可知: $U = 400 \text{ V}$, 即此时的偏转电压 $U = 400 \text{ V}$ 。

2 几何法

随着 $a、b$ 之间电压 U 的增大, 粒子从两极板间的出射点缓慢上移。速度变为 $v' (v' > v)$, 速度偏转角变为 $\theta' (\theta' > \theta)$, 半径变为 $r' (r' > r)$ 。但在上述分析②式中提到, 带电粒子在磁场中做圆周运动的半径 $r = \frac{mv}{qB} = \frac{mv_0}{qB \cos \theta}$, 则 $r \cos \theta = 0.4 \text{ m}$ 是恒定的。也就是说, 可把不同出射点的粒子看成均由 F 点射出, 只是出射速度大小和方向变化(半径大小变化、圆心位置变化), 而所有半径在磁场左边界 MN 上的投影 ($r' \cos \theta' = 0.4$) 不变。最短的运动时间(即最小圆心角), 与各粒子的相对出射位置无关。

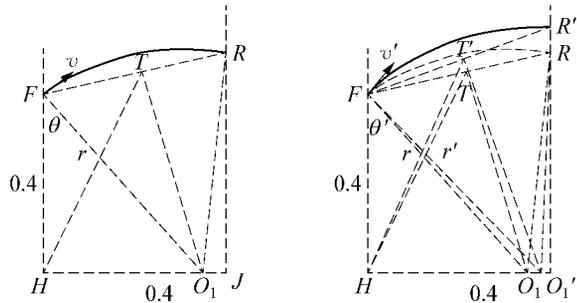


图 4 速度 v 入射时的轨迹图 图 5 速度 v' 入射时的轨迹对比图

如图 4 所示, 粒子以速度 v 射入磁场区域, 设圆心 O_1 在左右两边界上的投影点为 $H、J$ 。 $FO_1 = RO_1 = r$, $\triangle FO_1R$ 为等腰三角形, 取 T 为 FR 中点, 连接 TO_1 , 可知 $TO_1 \perp FR$, 又因 $\angle FHO_1$ 为直角, 所以 $F、H、O_1、T$ 四点共圆, $\angle FO_1T = \angle FHT$ (对应圆上同一条弦 FT)。根据上述分析可知, 要求最小圆心角 ($\angle FO_1R$), 即 $\angle FO_1T = \angle FHT$ 最小。如图 5 所示, 粒子以速度 $v' (v' > v)$ 射入磁场区域, 经圆周运动从右边界 R' 离开磁场。在这种情况下, 圆心角为 $\angle FO_1'R$, 取 T' 为 FR' 中点, 作 $O_1'T'$ 垂直于 FR' , 同理可得 $FT'O_1'H$ 四点共圆, 同样有 $\angle FO_1'T' = \angle FHT'$, 随着 T 点上移到 T' 点, 显然有 $\angle FHT' < \angle FHT$, 即圆弧 FR' 对应圆心角较圆弧 FR 对应的圆心角更小。

由上述分析可知, 随着电压 U 的增大, 进入磁场速度 v 变大(半径变大), 但圆心角逐渐减小, 当 O_1' 与磁场右边界 L 点重合时, 圆心角 $\angle FO_1'R$ 达到最小 ($\angle FO_1'R = \theta' = \frac{\pi}{4}$), 所以 $t_{\min} = \frac{\pi m}{4qB} = \frac{\pi}{2} \times 10^{-6} \text{ s}$, 同方法 1 分析, 偏转电压 $U = 400 \text{ V}$ 。

3 运动分解法

可以把带电粒子在磁场中的圆周运动分解为：与水平分速度 v_0 对应的圆周运动和与竖直分速度 v_y 对应的圆周运动。当电压 U 变化时，虽然粒子在电场中的出射位置不同，出射速度大小也不同，但水平分速度 v_0 始终保持不变。根据 $r = \frac{mv}{qB}$ ，水平分速度 v_0 所对应的圆周运动半径 r_x 始终保持不变；而竖直分速度 v_y 越大，则对应的圆周运动半径 r_y 越大。

如图 6 所示，小圆可看作是较小的竖直分速度 v_{y1} 对应的圆周运动轨迹，大圆可看作是较大的竖直分速度 v_{y2} 对应的圆周运动轨迹。由圆周运动时间 $t = \frac{\theta m}{qB}$ 可知：在相同时间内，绕过的圆心角均为 θ ， v_y 不同的粒子，水平位移显然不同。即在同一时刻， v_y 较小的粒子，圆弧上两点水平距离 FA 较小， v_y 较大的粒子，圆弧上两点水平距离 FB 较大。

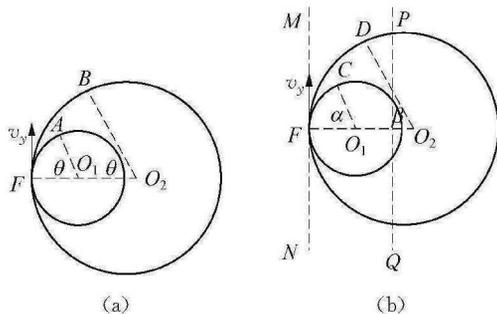


图 6 大小不同的两个竖直分速度 v_y 所对应的圆周运动轨迹

因此， v_y 大小不同的两个粒子 ($v_{y1} > v_{y2}$)，若最终得到相同的水平位移 s (从左边界到右边界)，则满足 $s = x_{v_0} + x_{v_y}$ (x_{v_0} 表示由 v_0 引起圆周运动的水平位移， x_{v_y} 表示由竖直分速度 v_y 引起的水平位移)。经分析，只可能是这种情况：竖直分速度为 v_{y1} 的分运动对应的水平位移 x_{v_y} 较大，而绕过圆心角 β 较小 (运动时间 t_1 较短)，所以水平分速度 v_0 引起的水平位移 x_{v_0} 较小，有 $x_{v_0} + x_{v_y} = s$ ；而竖直分速度为 v_{y2} 的分运动对应的水平位移 x_{v_y} 较小，绕过的圆心角 α 较大 (运动时间 t_2 较长)，所以水平分速度 v_0 引起的水平位移 x_{v_0} 较大，依然有 $x_{v_0} + x_{v_y} = s$ 。综上分析，要使 t 最小 (水平分速度 v_0 引起的水平位移 x_{v_0} 最小)，则竖直分速度 v_y 对应的水平位移要达到最大，因此 v_y 取最大值时，粒子在电场中的侧移量 $y_{\max} = \frac{d}{2} = 0.1 \text{ m}$ ，带电粒子在磁场中的运动时间最短。同方法 1 分析可知，

$$t_{\min} = \frac{\pi m}{4qB} = \frac{\pi}{2} \times 10^{-6} \text{ s}, \text{ 偏转电压 } U = 400 \text{ V}.$$

4 Matlab 软件模拟法

尝试用 Matlab 软件模拟带电粒子在有界磁场中运动的轨迹，如图 7 所示：

以粒子入射方向延长线交点 O' 为坐标原点，从轨迹可以看到，粒子的出射点分布于 $0 \leq y \leq 0.1 \text{ m}$ 区间内，且轨迹长度和与右边界的交点都不同。此外，也可作出粒子在有界磁场区域做圆周运动的圆心角 Φ 随出射点 y 的变化图线，由图 8 可知， Φ 随着 y 的增大而减小，即 $y = 0.1 \text{ m}$ 时，圆心角取最小值 $\Phi_{\min} = \frac{\pi}{4}$ 。同样的思路，作出粒子在磁场中的运动时间 t 随出射点 y 的变化图线，由图 9 可知， t 随着 y 的增大而减小，即 $y = 0.1 \text{ m}$ 时， $t_{\min} = \frac{\pi}{2} \times 10^{-6} \text{ s}$ 。

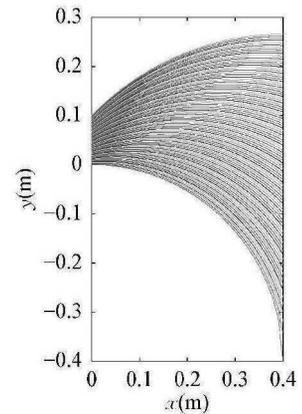


图 7 所有出射粒子在磁场中的轨迹分布图

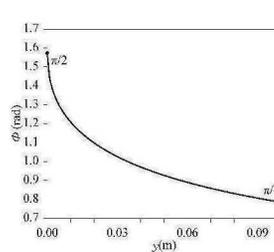


图 8 圆心角 Φ 随出射点 y 的变化规律

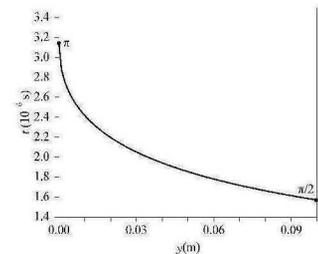


图 9 运动时间 t 随出射点 y 的变化规律

综上，对于带电粒子在有界磁场中入射速度方向和大小都在变化，且求最短运动时间的问题，运用解析法、几何法、运动分解法、Matlab 软件模拟法展开深度思考，由浅入深，由易至难。既蕴含严谨的数学推理，又涵盖巧妙的物理方法，充分体现数理结合的学科思想方法在解决物理问题中的重要作用，夯实学科基本方法，培养物理高阶思维。利用 Matlab 软件模拟粒子轨迹、画出函数曲线的方法，拓宽学科视野，提升思维品质，促进素养水平的提高。

参考文献

- [1] 漆安慎, 杜焯英. 普通物理教程力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 157-158.
- [2] 戎杰. 对一道双球平衡问题的深度思考[J]. 物理教学, 2020(4): 59-61.