高中视角下的初中物理

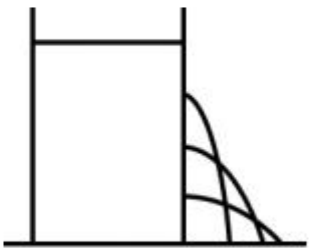
——谈水瓶问题的三种解法

孙旭磊

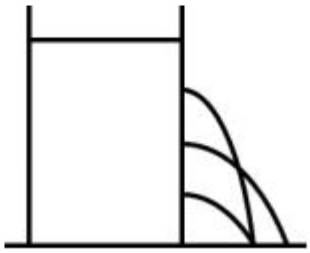
2019-03-15

水瓶问题

一个放在水平面上的瓶内装有液体，在瓶壁上的不同位置同时开三个小孔，忽略空气阻力，则从孔中流出的液体运动轨迹近似为（　　）。



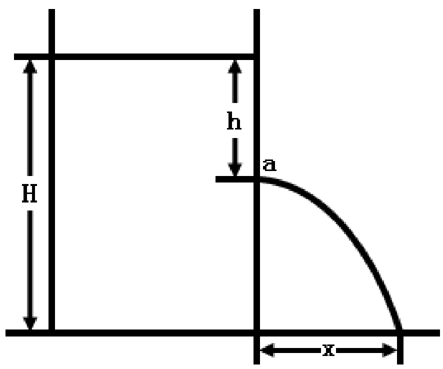
A.



B.

（于 2017 年摘自初二物理题，原答案为 A）

解法 I　微元法



如图，设瓶内的液体柱高度为 H，小孔 a 深度（到液体柱最高处的距离）为 h。把 a 点处液体（以下简称 A）看作一个极小的立方体，左侧面积为 S，横向长度为 L。则由于液体压强为

$$p = \rho gh,$$

而 A 立方体高度极小，故上下压强近似相等，可以抵消。A 受到向右的压力为

$$F = pS = \rho ghS,$$

开口瞬间做功为

$$W = FL = \rho ghSL = \rho SLgh = mgh。$$

这些功全部用于增加其动能，即

$$E_k = W。$$

又因为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2,$$

故

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh,$$

得

$$v = \sqrt{2gh}。 \qquad ①$$

液体从孔中流出后，在竖直方向上做自由落体运动，故

$$\mathrm{H}-\mathrm{h}=\frac{1}{2}\mathrm{g}\mathrm{t}^2，$$

得

$$\mathrm{t}=\sqrt{\frac{2(\mathrm{H}-\mathrm{h})}{\mathrm{g}}}。\qquad ②$$

在水平方向上做匀速直线运动，故落地点到 a 点的水平位移为

$$\mathrm{x}=\mathrm{vt}。$$

将①②带入得

$$\mathrm{x}=\sqrt{2\mathrm{gh}\cdot\frac{2(\mathrm{H}-\mathrm{h})}{\mathrm{g}}}=2\sqrt{\mathrm{h}(\mathrm{H}-\mathrm{h})}。$$

由数学知识可知，$\left|\mathrm{h}-\frac{1}{2}\mathrm{H}\right|$越小，x 就越大。当$\mathrm{h}=\frac{1}{2}\mathrm{H}$时，x 有最大值。故选 B。

解法Ⅱ 功能原理

设瓶内的液体柱高度为 H，小孔 a 深度（到液体柱最高处的距离）为 h。把 a 点处液体当做从液面处（液体最高处）流过来，则减少的重力势能等于增加的动能，即

$$\Delta\mathrm{E}_\mathrm{p}=\Delta\mathrm{E}_\mathrm{k}。$$

故

$$\frac{1}{2}\mathrm{m}\mathrm{v}^2=\mathrm{mgh}，$$

得

$$\mathrm{v}=\sqrt{2\mathrm{gh}}。\qquad ①$$

液体从孔中流出后，在竖直方向上做自由落体运动，故

$$\mathrm{H}-\mathrm{h}=\frac{1}{2}\mathrm{g}\mathrm{t}^2，$$

得

$$\mathrm{t}=\sqrt{\frac{2(\mathrm{H}-\mathrm{h})}{\mathrm{g}}}。\qquad ②$$

在水平方向上做匀速直线运动，故落地点到 a 点的水平位移为

$$\mathrm{x}=\mathrm{vt}。$$

将①②带入得

$$\mathrm{x}=\sqrt{2\mathrm{gh}\cdot\frac{2(\mathrm{H}-\mathrm{h})}{\mathrm{g}}}=2\sqrt{\mathrm{h}(\mathrm{H}-\mathrm{h})}。$$

由数学知识可知，$\left|\mathrm{h}-\frac{1}{2}\mathrm{H}\right|$越小，x 就越大。当$\mathrm{h}=\frac{1}{2}\mathrm{H}$时，x 有最大值。故选 B。

解法Ⅲ 伯努利原理

伯努利原理(Bernoulli's principle)：

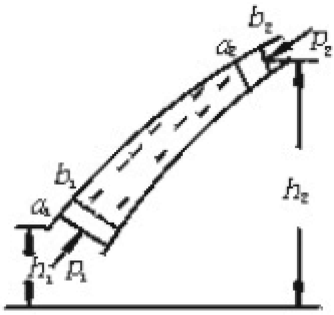
流体流动时，如果任意一点的流速都与时间无关，则称为定常流动。密度不随空间和时间变化的流体称为不可压缩流体。不可压缩、没有粘滞力的流体称为理想流体。理想流体定常流动时，流管中任意一点的压强 p、该处的流速 v、高度 h 满足关系

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh=常数，$$

其中 ρ 为流体密度，这个关系称为伯努利方程。它也可以被表述为

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh_1=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho gh_2。$$

证明：如图，设细管中有理想流体在做定常流动，且流动方向从左向右。在管的 a_1、a_2 处用横截面截出一段流体。设 a_1 处的横截面积为 S_1，流速为 v_1，高度为 h_1；a_2 处的横截面积为 S_2，流速为 v_2，高度为 h_2。经过很短的时间 Δt，这段流体的左端由 a_1 移到 b_1，右端由 a_2 移到 b_2，两端移动的距离为 Δl_1、Δl_2，左端流入的流体体积为$\Delta V_1=S_1\Delta l_1$，右端流出的体积为$\Delta V_2=S_2\Delta l_2$。因为理想流体不可压缩，故



$$\Delta V_1=\Delta V_2=\Delta V。$$

左端的力对这段流体做的功为

$$W_1=F_1\Delta l_1=p_1S_1\Delta l_1=p_1\Delta V_1=p_1\Delta V。$$

因为右边对这段流体的作用力向左，而这段流体的位移向右，故右端的力对这段流体做功为

$$W_2=-F_2\Delta l_2=-p_2S_2\Delta l_2=-p_2\Delta V_2=-p_2\Delta V。$$

两侧外力对这段流体所做的功为

$$W=W_1+W_2=(p_1-p_2)\Delta V。$$

因为我们研究的是定常流动，所以 b_1 到 a_2 之间的流体的动能和重力势能没有改变。故这段流体的机械能变化量等于流出部分流体的机械能减去流入部分流体的机械能

$$\Delta E=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)+mg(h_2-h_1)=\frac{1}{2}\rho(v_2^2-v_1^2)\Delta V+\rho g(h_2-h_1)\Delta V。$$

因为理想流体没有粘滞性，所以流体在流动时机械能不会转化为内能，故

$$W=\Delta E，$$

即

$$(p_1-p_2)\Delta V=\frac{1}{2}\rho(v_2^2-v_1^2)\Delta V+\rho g(h_2-h_1)\Delta V，$$

得

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh_1=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho gh_2。$$

托里切利定律(Torricelli's law)：

一个放在水平面上的瓶内装有液体，在瓶壁上开一个深度为 h 的小孔，其喷射速度为$\sqrt{2gh}$，其中 h 为开口的深度（到液体柱最高处的距离）。

证明：瓶的横截面积远大于孔口面积，出流过程中液面的高度变化可以忽略，即$v_1 = 0$。因为 h 保持不变，所以小孔出流是定常的。设小孔出流速度为 v_2。两个截面的压强都为大气压 p_0，由伯努利方程

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

得

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2gh}。$$

托里切利定律(Torricelli's law)的推广：

瓶内的液体柱高度为 H，小孔 a 深度为 h，当$h = \frac{1}{2}H$时，喷射的水平距离最大。

证明：由托里切利定律得

$$v = \sqrt{2gh}。 \qquad ①$$

液体从孔中流出后，在竖直方向上做自由落体运动，故

$$H - h = \frac{1}{2}gt^2，$$

得

$$t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}。 \qquad ②$$

在水平方向上做匀速直线运动，故落地点到 a 点的水平位移为

$$x = vt。$$

将①②带入得

$$x = \sqrt{2gh \cdot \frac{2(H-h)}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)}。$$

由数学知识可知，$\left|h - \frac{1}{2}H\right|$越小，x 就越大。当$h = \frac{1}{2}H$时，x 有最大值。

本题由托里切利定律(Torricelli's law)的推广可知应选 B。